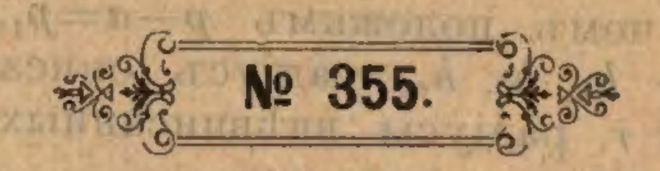
XXX Сем. № 7.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

15 Октября  № 355. 1903 г.

РАЦІОНАЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

Раціональность площади, биссектриссъ, медіанъ.

П. Долгушина.

Раціональными называются такіе тр-ки, въ которыхъ при раціональныхъ сторонахъ и площадь выражается раціональнымъ числомъ. Въ задачникахъ нерѣдко встрѣчаются тр-ки со сторонами 3, 4, 5, со сторонами 5, 12, 13, со сторонами 13, 14, 15; первые два—прямоугольные ($3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$), послѣдній—остроугольный ($13^2+14^2>15^2$); площади этихъ тр-ковъ раціональны (6, 30, 84). Но въ этихъ задачникахъ совершенно отсутствуютъ примѣры на тр-ки съ раціональными биссектриссами, медіанами, между тѣмъ какъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ на примѣненіе основныхъ формулъ не слѣдовало бы отвлекать вниманіе учениковъ трудностями вычисленія. Желаніе дать удобные примѣры на вычисленіе биссектриссъ, медіанъ и заставило меня расширить задачу о нахожденіи раціональныхъ тр-ковъ *).

---

*) Быть можетъ, цѣлесообразно подчеркнуть, что авторъ ставитъ себѣ лишь задачей найти нѣкоторые треугольники съ требуемыми раціональными элементами, отнюдь не рѣшая вопроса во всемъ его объемѣ.

Прим. Ред.

Въ 1897 году въ апрѣльской книжкѣ „Педагогическаго Сборника“ помѣщена моя статья „О раціональности биссектриссъ въ тр-кѣ съ раціональными сторонами“, въ которой я пользовался, между прочимъ, и свойствами тригонометрическихъ функцій. Теперь я изслѣдую этотъ вопросъ проще, полнѣе, безъ тригонометрическихъ функцій, также разсматриваю и тр-ки съ раціональными медіанами.

Будемъ обозначать стороны тр-ка буквами a, b, c, полупериметръ p (при чемъ положимъ $p-a=p_1$, $p-b=p_2$, $p-c=p_3$), площадь s, высоты h_a, h_b, h_c, радіусъ описанной окружности R, радіусъ вписанной r, радіусы внѣвписанныхъ r_a, r_b, r_c, биссектриссы l_a, l_b, l_c, медіаны m_a, m_b, m_c.

Извѣстны соотношенія

$$s=\sqrt{pp_1p_2p_3},\ h_a=\frac{2s}{a},\ h_b=\frac{2s}{b},\ h_c=\frac{2s}{c},$$

$$R=\frac{abc}{4s},\ r=\frac{s}{p},\ r_a=\frac{s}{p_1},\ r_b=\frac{s}{p_2},\ r_c=\frac{s}{p_3},$$

$$l_a=\frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bcpp_1},\quad l_b=\frac{2}{c+a}\sqrt{capp_2},\quad l_c=\frac{2}{a+b}\cdot\sqrt{abpp_3},$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\quad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Отсюда видно, что раціональность площади влечетъ за собою раціональность высотъ, радіусовъ описанной, вписанной и внѣвписанныхъ окружностей. Положимъ, что раціональна площадь $s=\sqrt{pp_1p_2p_3}=pp_1\sqrt{\frac{p_2p_3}{pp_1}}$. Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{p_2p_3}{pp_1}=\delta^2$, гдѣ δ раціонально, или (λ тоже раціонально)

$\frac{p_3}{p_1}=\frac{\delta}{\lambda}$	$\frac{p_3}{b}=\frac{\delta}{\delta+\lambda}$	$\frac{p_1}{\lambda}=\frac{p_3}{\delta}=\frac{p(1-\delta\lambda)}{\delta+\lambda}$, иначе
$\frac{p_2}{p}=\delta\lambda$	$\frac{p_1}{b}=\frac{\lambda}{\delta+\lambda}$	$\frac{p}{\delta+\lambda}=\frac{p_1}{\lambda(1-\delta\lambda)}=\frac{p_3}{\delta(1-\delta\lambda)}=\frac{p_2}{\delta\lambda(\delta+\lambda)}=$
		$=\frac{a}{\delta(1+\lambda^2)}=\frac{b}{(\delta+\lambda)(1-\delta\lambda)}=\frac{c}{\lambda(1+\delta^2)}\ \dots (S)$
	$\frac{p}{b}=\frac{1}{1-\delta\lambda}$	$s=pp_1\delta=bc\,\frac{\delta}{1+\delta^2}$.

Для возможности тр-ка необходимо и достаточно, чтобы числа p_1, p_2, p_3 были положительны; это условіе будетъ выполнено, если $\delta\lambda<1$ ($\delta>0$, $\lambda>0$).

Примѣры:

$$\lambda=1,\ \delta=\frac{1}{2},\ a=4,\ b=3,\ c=5,\ s=6;$$

$$\lambda=1,\ \delta=\frac{1}{4},\ a=8,\ b=15,\ c=17,\ s=60;$$

$$\lambda=2,\ \delta=\frac{1}{3},\ a=15,\ b=7,\ c=20,\ s=42.$$

Въ тр-кѣ, въ которомъ площадь s раціональна, биссектриссы выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{pp_1}{bc}}=\frac{2bc}{b+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}},\quad l_b=\frac{2ca}{c+a}\cdot\frac{\delta+\lambda}{\sqrt{(1+\delta^2)(1+\lambda^2)}},$$

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Чтобы l_a было раціонально, необходимо и достаточно, чтобы $1+\delta^2=\mu^2$, откуда

$$1=(\mu-\delta)(\mu+\delta)\left|\begin{array}{l}\mu-\delta=\varphi\\ \mu+\delta=\dfrac{1}{\varphi}\end{array}\right|\ \delta=\frac{1-\varphi^2}{2\varphi}.$$

Для раціональности l_c возьмемъ

$$\lambda=\frac{1-\psi^2}{2\psi}\left(1-\delta\lambda=\frac{[\varphi(1-\psi)+1+\psi][\varphi(1+\psi)-(1-\psi]}{4\varphi\psi},\ \varphi>\frac{1-\psi}{1+\psi}\right).$$

При раціональности s, l_a, l_c третья биссектрисса l_b тоже раціональна $\left(\sqrt{(1+\delta^2))(1+\lambda^2}\right)=\frac{1+\varphi^2}{2\varphi}\cdot\frac{1+\psi^2}{2\psi}\Big)$.

Примѣры:

$$\varphi=\frac{1}{2},\ \delta=\frac{3}{4},\ \lambda=\frac{2}{3},\ a=26,\ b=17,\ c=25,\ s=204,\ l_a=16\frac{4}{21};$$

$$\varphi=\frac{1}{3},\ \delta=\frac{4}{3},\ \lambda=\frac{1}{2},\ a=30,\ b=11,\ c=25,\ s=132,\ l_a=5\frac{1}{2}.$$

$$\varphi=\frac{1}{2},\ \delta=\frac{3}{4},\ \psi=\frac{2}{3},\ \lambda=\frac{5}{12},\ a=169,\ b=154,\ c=125,\ s=9240,$$

$$l_a=110\frac{110}{279},\ l_b=123\frac{17}{21},\ l_c=148\frac{244}{323}.$$

Потребуемъ, чтобы при раціональномъ s была и раціональная медіана, напримѣръ, m_a.

$$(2m_a)^2=2b^2+2c^2-a^2=(b-c)^2+(b+c)^2-a^2=(b-c)^2+4pp_1=$$

$$=\frac{p^2}{(\delta+\lambda)^2}\left[(\delta-2\delta^2\lambda+\delta\lambda^2)^2+4(\delta+\lambda)(1-\delta\lambda)\lambda\right],$$

или

$$\left[\frac{2(\delta+\lambda)m_a}{p}\right]^2=\left[\delta-2(1-\delta^2)\lambda+\delta\lambda^2\right]^2+8\delta(1-\delta^2)\lambda=$$

$$=\left[2\lambda-(1-\lambda^2)\delta+2\lambda\delta^2\right]^2+12\lambda^2\delta\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\lambda^2}{\lambda}-\delta\right).$$

Видимъ, что для раціональности m_a *достаточно* принять $\delta=1$ (тогда $2m_a=a$, и тр-къ прямоугольный) или $\delta=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ $\left(\lambda<1\right.$ и $\left.\delta\lambda<\frac{2}{3}\right)$.

Примѣръ:

$$\psi=\frac{1}{2},\ \lambda=\frac{3}{4},\ \delta=\frac{7}{18},\ a=525,\ b=697,\ c=746,\ s=175644,$$

$$m_a=672\frac{1}{2},\ m_c=479\frac{71}{611}.$$

Раціональность биссектриссъ разсмотримъ теперь отдѣльно отъ раціональности площади. Пусть раціональна биссектрисса $l_a=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{pp_1}{bc}}$, т. е. $\frac{pp_1}{bc}=k^2$, иначе

$$\begin{array}{l|l|l} pt=kb & at+b(t-k)+ct=0 & b(t-k)+c(t-kt)=0 \\ p_1=kct & -a+b+c(1-2kt)=0 & a(t-k)+c(k-2k^2t+kt^2)=0 \end{array}$$

$$\frac{a}{k(1-2kt+t^2)}=\frac{b}{t(1-kt)}=\frac{c}{k-t}=\frac{p}{k(1-kt)}=\frac{p_1}{kt(k-t)}=$$

$$=\frac{p_2}{(k-t)(1-kt)}=\frac{p_3}{t(1-k^2)}\ \ldots\ (L).$$

Такъ какъ $p>b$, то $k>t$, а тогда $1>k>t>0$, $1>kt$, и тр-къ возможенъ.

Примѣръ:

$$k=\frac{1}{2},\ t=\frac{1}{3},\ \frac{a}{7}=\frac{b}{5}=\frac{c}{3}=\frac{l_a}{1\frac{7}{8}}.$$

Пусть, кромѣ l_a, раціональна еще биссектрисса l_b.

$l_b=\frac{2ac}{a+c}\cdot\sqrt{\frac{pp_2}{ac}}=\frac{2ac(1-kt)}{a+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2kt+t^2}}$. Для раціональности l_b должно быть $1-2kt+t^2=v^2$ (v раціонально), или $1-v^2=t(2k-t)$, откуда

$$\begin{array}{l|l} 1+v=tu & \\ (1-v)u=2k-t & t=\frac{2(u-k)}{u^2-1}. \end{array}$$

Для возможности тр-ка k и t должны удовлетворять неравенствамъ $1>k>t>0$.

$k-t=\frac{k(u^2+1)-2u}{u^2-1}$, $u-\frac{2u}{u^2+1}=u\cdot\frac{u^2-1}{u^2+1}$, слѣдовательно, или $u>1>k>\frac{2u}{u^2+1}$, или $u<k<\frac{2u}{u^2+1}<1$ $\left(\text{вѣдь, } t>0 \text{ и } 1-\frac{2u}{u^2+1}=\right.$ $\left.=\frac{(u-1)^2}{u^2+1}\right)$.

Примѣры:

$$u=2,\ 1>k>\frac{4}{5};\ \text{пусть } k=\frac{7}{8},$$

$$\text{тогда } t=\frac{3}{4},\ \frac{a}{28}=\frac{b}{33}=\frac{c}{16}=\frac{l_a}{18\frac{6}{7}}=\frac{l_b}{14};$$

$$u=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<k<\frac{4}{5};\ \text{пусть } k=\frac{2}{3},$$

$$\text{тогда } t=\frac{4}{9},\ \frac{a}{49}=\frac{b}{38}=\frac{c}{27}=\frac{l_a}{21\frac{3}{65}}=\frac{l_b}{27\frac{15}{29}}.$$

Что касается раціональности третьей биссектриссы l_c, то одновременно съ нею становится раціональною и площадь:

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{1-k^2}{1-2kt+t^2}}=\frac{2ab}{a+b}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2}}{v},\ s=p(p-a)\cdot\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

Отсюда можно заключить, что s выражается раціонально через l_a, l_b, l_c, a, b, c. Въ самомъ дѣлѣ, $s=\frac{l_al_bl_c(a+b)(b+c)(c+a)}{8pabc}$.

Полагаемъ $1-k^2=\psi^2$, откуда

$$\left.\begin{aligned}1+\psi&=k\varphi\\ 1-\psi&=\frac{k}{\varphi}\end{aligned}\right|\ k=\frac{2\varphi}{1+\varphi^2};\ \text{если } \varphi>0, \text{ то } k>0 \text{ и } 1-k=\frac{(1-\varphi)^2}{1+\varphi^2},$$

т. е. $k<1$.

Примѣръ:

$$u=3,\ 1>k>\frac{3}{5};\ \frac{2\varphi}{1+\varphi^2}-\frac{3}{5}=\frac{(3\varphi-1)(3-\varphi)}{5(1+\varphi^2)}\left(\text{положительно при } \frac{1}{3}<\varphi<3\right);$$

пусть $\varphi=\frac{1}{2}$, $k=\frac{4}{5}$, $t=\frac{11}{20}$, $a=169$, $b=154$, $c=125$, $s=9240$,

$$l_a=110\frac{110}{279},\ l_b=123\frac{17}{21},\ l_c=148\frac{244}{323}.$$

Раціональность медіанъ независимо отъ раціональности площади.

Пусть въ тр-кѣ раціональна медіана m_c.

$$(2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2 - c^2 = (a-b)^2 + 4pp_3,$$

или $$(2m_c + a - b)(2m_c - a + b) = 4pp_3.$$

Отсюда

$2m_c + a - b = 2kp$, $(2m_c - a + b)k = 2p_3$ | $p_3 = k(kp - a + b) = k(kp + p_1 - p_2)$, причемъ $2m_c + a > b$, слѣдовательно, $k > 0$.

Принимая во вниманіе, что $p = p_1 + p_2 + p_3$, находимъ

$$p_1 k(k+1) + p_2 k(k-1) + p_3(k^2-1) = 0.$$

Изъ этого уравненія видно, что $k < 1$, такъ какъ p_1, p_2, p_3 положительны.

Примѣры: $k = \frac{1}{2}$, $p_2 = 3(p_1 - p_3)$, $m_c = \frac{1}{2}(p - a + b)$

$p_1 =$	2,	3,	5,	5,	6,	5
$p_2 =$	3,	6,	9,	6,	3,	3
$p_3 =$	1,	1,	2,	3,	5,	4
$p =$	6,	10,	16,	14,	14,	12
$a =$	4,	7,	11,	9,	8,	7
$b =$	3,	4,	7,	8,	11,	9
$c =$	5,	9,	14,	11,	9,	8
$m_c =$	$2\frac{1}{2}$,	$3\frac{1}{2}$,	6,	$6\frac{1}{2}$,	$8\frac{1}{2}$,	7.

Треугольникъ (9, 8, 11) представляетъ интересный примѣръ раціональности двухъ медіанъ $m_a = 8\frac{1}{2}$, $m_c = 6\frac{1}{2}$.

Для того, чтобы, кромѣ m_c, была раціональна медіана m_a, къ уравненію $p_1 k(k+1) + p_2 k(k-1) + p_3(k^2-1) = 0$ нужно присоединить $p_1(q^2-1) + p_2 q(q-1) + p_3 q(q+1) = 0$, гдѣ $0 < q < 1$.

$$p_1 k(k+1) + p_2 k(k-1) + p_3(k^2-1) = 0$$

$$p_1(q^2-1) + p_2 q(q-1) + p_3 q(q+1) = 0$$

$$\frac{p_1}{q(1-k)(2k+1-q)} = \frac{p_2}{(1+k)(1+q)(k+q-1)} = \frac{p_3}{k(1-q)(2q+1-k)} = \frac{p}{k-1+(1+3k)q}.$$

Знаменатели первой и третьей дроби положительны при

$0<k<1$, $0<q<1$; чтобы знаменатель и второй дроби былъ положителенъ, нужно выполнить условіе $k+q>1$.

Примѣры:

$$k=\frac{1}{2},\ q=\frac{2}{3},\ a=26,\ b=27,\ c=31,\ m_a=26,\ m_c=21\frac{1}{2};$$

$$k=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{4},\ a=29,\ b=23,\ c=36,\ m_a=19,\ m_c=26\frac{1}{2}.$$

$$k=\frac{2}{5},\ q=\frac{3}{4},\ a=11,\ b=13,\ c=16,\ m_a=9,\ m_c=13\frac{1}{2}.$$

Попробуемъ найти тр-ки, въ которыхъ всѣ три медіаны раціональны.

Примемъ для удобства записей $p_1=q(1-k)(2k+1-q)$, $p_2=(1+k)(1+q)(k+q-1)$, $p_3=k(1-q)(2q+1-k)$, $p=-1+k+(1+3k)q^2$; тогда m_a и m_c раціональны, а $(2m_b)^2=(a-c)^2+4pp_2=(p_3-p_1)^2+4pp_2=$
$=[k(1+k)-(1-3k^2)q+(1-3k)q^2]^2+4[-(1-k)+(1+3k)q](1+k)[-(1+k)+$
$+kq+q^2]=(1-k)(2+k)^2-2(1-k)(2+11k+8k^2-3k^3)q+(-3+6k+6k^2+$
$+18k^3+9k^4)q^2+2(1+11k+9k^2-9k^3)q^3+(1-3k)^2q^4=$

$$=\left[(1-k)(2+k)-\frac{2+11k+8k^2-3k^3}{2+k}q-(1-3k)q^2\right]^2+R,$$

$$R=\frac{36k(1+k)(1+2k-k^2)}{2+k}\cdot q^2\left[q-\frac{(1-k)(2+4k+3k^2)}{(2+k)(1+2k-k^2)}\right].$$

R обращается въ нуль при $q=\dfrac{(1-k)(2+4k+3k^2)}{(2+k)(1+2k-k^2)}$. Такъ какъ $0<k<1$, то $q>0$. Должно быть еще $q<1$, $k+q>1$.

$$1-q=1-\frac{2+2k-k^2-3k^3}{2+5k-k^3}=k\cdot\frac{3+k+2k^2}{2+5k-k^3},$$ слѣдовательно, $q<1$.

$$k+q-1=k\left(1-\frac{1-q}{k}\right)=k\frac{-1+4k-2k^2-k^3}{2+5k-k^3}=k\frac{(1-k)(-1+3k+k^2)}{2+5k-k^3}.$$

Трехчленъ $-1+3k+k^2=\left(k+\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}\right)\left(k-\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}\right)$, слѣдовательно, $k+q>1$ при $k>\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}>0{,}302$.

Положимъ $k=\dfrac{1}{2}$, тогда $q=\dfrac{19}{35}$, $\dfrac{a}{377}=\dfrac{b}{619}=\dfrac{c}{404}=$

$$=\frac{m_a}{487\frac{1}{2}}=\frac{m_b}{238\frac{1}{2}}=\frac{m_c}{471}.$$

Выраженіе сторонъ раціональнаго тр-ка членами ариѳметической прогрессіи. Тр-ки (3, 4, 5), (13, 14, 15) представляютъ интересные, удобные для запоминанія примѣры раціональныхъ тр-ковъ, въ которыхъ стороны выражаются послѣдовательными числами.

Полагая въ уравненіяхъ (S) $p_1 = n$, $p_2 = n-1$, $p_3 = n-2$, получимъ

$$\frac{n-1}{\delta\lambda(\delta+\lambda)} = \frac{3(n-1)}{\delta+\lambda} \quad\Big|\quad \delta\lambda = \frac{1}{3} \quad\Big|\quad n = \frac{2}{1-3\delta^2} \quad\Big|\quad \delta = \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$$

$$\frac{n}{n-2} = \frac{\lambda}{\delta} \quad\Big|\quad \frac{n}{n-2} = \frac{1}{3\delta^2} \quad\Big|\quad \delta < \sqrt{\frac{1}{3}} < 0{,}578 \quad\Big|\quad n = 8,\ 3,\ \frac{22}{13},\ \frac{25}{11}$$

$$a = 13,\ 3,\ 25,\ 17$$

$$b = 14,\ 4,\ 38,\ 28$$

$$c = 15,\ 5,\ 51,\ 39.$$

Полагая въ уравненіяхъ (L) $p_1 = n$, $p_2 = n-1$, $p_3 = n-2$ (биссектрисса l_a соотвѣтствуетъ наименьшей сторонѣ), получимъ:

$$\frac{3(n-1)}{k(1-kt)} = \frac{n-1}{(k-t)(1-kt)} \quad\Big|\quad \frac{3}{1} = \frac{k}{k-t} \quad\Big|\quad k = \frac{3}{2}t \quad\Big|\quad t > \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{n}{n-1} = \frac{kt}{1-kt} \quad\Big|\quad \frac{2n-1}{1} = \frac{1}{2kt-1} \quad\Big|\quad 2n-1 = c = \frac{1}{3t^2-1}$$

$$k < 1 \text{ или } t < \frac{2}{3}; \quad \text{итакъ,} \quad \sqrt{\frac{1}{3}} < t < \frac{2}{3},$$

$$t = \frac{3}{5},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{7}{11},\quad \frac{7}{12}$$

$$c = 25,\quad 64,\quad 121,\quad 48$$

$$b = 23,\quad 53,\quad 95,\quad 47$$

$$a = 21,\quad 42,\quad 69,\quad 46$$

$$l_a = 21\frac{9}{16},\quad 54\frac{14}{39},\quad 101\frac{43}{72},\quad 41\frac{53}{95}.$$

Полагая въ уравненіяхъ (L) $p_1 = n$, $p_2 = n-1$, $p_3 = n+1$ (биссектрисса l_a соотвѣтствуетъ средней сторонѣ), получимъ

$$\frac{n}{kt(k-t)} = \frac{3n}{k(1-kt)} \quad\Big|\quad 3t(k-t) = 1-kt, \text{ или } k = \frac{1+3t^2}{4t} \quad\Big|\quad k-t = \frac{1-t^2}{4t},$$

$$\frac{n}{n-1} = \frac{kt}{1-kt} \quad\Big|\quad 2n-1 = c = \frac{1}{2kt-1} = \frac{2}{3t^2-1} \quad\Big|\quad 1-k = \frac{(1-t)(3t-1)}{4t},$$

слѣдовательно, $1 > t > \sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{1}{3}$,

$$t = \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5}$$

$$a = 7,\ 43,\ 26$$

$$b = 8,\ 54,\ 27$$

$$c = 6,\ 32,\ 25$$

$$l_a = 6,\ 36,\ 22\frac{1}{2}$$

Полагая въ уравненіяхъ (L) $p_1 = n$, $p_2 = n + 1$, $p_3 = n + 2$ (биссектрисса l_a соотвѣтствуетъ наибольшей сторонѣ)

$$\frac{3(n+1)}{k(1-kt)} = \frac{n+1}{(k-t)(1-kt)} \qquad k = \frac{3}{2}t,\ t < \sqrt{\frac{1}{3}} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{kt}{1-kt} \qquad 2n+1 = c = \frac{1}{1-2kt} = \frac{1}{1-3t^2}$$

$t =$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{2}{5}$,	$\frac{1}{6}$,	$\frac{1}{7}$,	$\frac{4}{7}$
$a =$	6,	7,	42,	69,	51,	34,	141,	51
$b =$	5,	5,	29,	47,	38,	23,	95,	50
$c =$	4,	3,	16,	25,	25,	12,	49,	49
$l_a =$	$3\frac{1}{3}$,	$1\frac{7}{8}$	$7\frac{11}{15}$,	$9\frac{39}{74}$,	$18\frac{2}{21}$,	$3\frac{33}{35}$,	$13\frac{41}{48}$,	$30\frac{30}{139}$.

Полагая въ уравненіи $p_1 = q(qp + p_3 - p_2)$ . . . . (M) $p_1 = n + 1$, $p_2 = n$, $p_3 = n - 1$ (медіана m_a соотвѣтствуетъ наименьшей сторонѣ), получимъ:

$$n+1 = q(3nq-1),\ \text{или}\ n = \frac{1+q}{3q^2-1}\ \left(q > \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$q =$	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{3}{5}$
$a =$	9,	45,	39
$b =$	10,	56,	40
$c =$	11,	67,	41
$m_a =$	$9\frac{1}{2}$,	$57\frac{1}{2}$,	$35\frac{1}{2}$.

Полагая въ уравненіи (M) $p_1 = n$, $p_2 = n + 1$, $p_3 = n - 1$ (ме-

діана m_a соотвѣтствуетъ средней сторонѣ), получимъ:

$$n = q(3nq - 2), \text{ или } n = \frac{2q}{3q^2 - 1} \left(q > \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$q =$	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{5}{6}$
$a =$	8,	48,	30,	40
$b =$	7,	37,	29,	27
$c =$	9,	59,	31,	53
$m_a =$	7,	43,	26,	37.

Положивъ въ уравненіи (M) $p_1 = n-1$, $p_2 = n$, $p_3 = n+1$ (медіана m_a соотвѣтствуетъ наибольшей сторонѣ), получимъ:

$$n - 1 = q(3nq + 1), \text{ или } n = \frac{1+q^2}{1-3q} \left(q < \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

$q =$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{5}$,	$\frac{1}{6}$
$a =$	13,	5,	53,	41.	39
$b =$	12,	4,	40,	30,	28
$c =$	11,	3,	27,	19,	17
$m_a =$	$9\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$21\frac{1}{2}$,	$14\frac{1}{2}$,	$12\frac{1}{2}$.

Особенно интересны тѣ случаи, когда стороны треугольника представляютъ рядъ послѣдовательныхъ чиселъ.

Замѣняя δ, t и q въ полученныхъ выраженіяхъ $\frac{2}{1-3\delta^2}$, $\frac{1}{3t^2-1}$, $\frac{1}{1-3t^2}$, $\frac{2}{3t^2-1}$, $\frac{2q}{3q^2-1}$, $\frac{1+q}{3q^2-1}$, $\frac{1+q}{1-3q^2}$ несократимой дробью $\frac{u}{v}$ и умножая числителя и знаменателя каждаго выраженія на v^2, получимъ $\frac{2v^2}{v^2-3u^2}$, $\frac{v^2}{3u^2-v^2}$, $\frac{v^2}{v^2-3u^2}$, $\frac{2v^2}{3u^2-v^2}$, $\frac{2uv}{3u^2-v^2}$, $\frac{v+u}{3u^2-v^2}$, $\frac{v+u}{v^2-3u^2}$. Разсмотримъ первую дробь $\frac{2v^2}{v^2-3u^2}$. Всякій дѣлитель v^2 и v^2-3u^2 дѣлитъ и $v^2-(v^2-3u^2)$, т. е. $3u^2$, а такъ какъ v и u взаимно-простыя числа, то дѣлитъ 3, слѣдовательно, общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя дроби $\frac{2v^2}{v^2-3u^2}$ — дѣлитъ 6. Точно также найдемъ, что общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя второй и третьей дроби дѣлитъ 3, четвертой дроби—дѣлитъ 6. Разсмотримъ пятую дробь $\frac{v+u}{3u^2-v^2}$. Общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя этой дроби

дѣлитъ и $3u^2-v^2+(u+v)^2$, или $u+v$ и $2u(2u+v)$; общій дѣлитель $u+v$ и $2u+v$ дѣлитъ и u, а слѣдовательно, и v, другими словами равняется единицѣ; то же скажемъ объ общемъ дѣлителѣ $u+v$ и u. Итакъ, общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя пятой и шестой дроби дѣлитъ 2. Чтобы эти дроби представляли цѣлыя числа, ихъ знаменатели должны дѣлить соотвѣтственно 6, 3, 3, 6, 2, 2. Такимъ образомъ, вопросъ сводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія $v^2-3u^2=\nu$, гдѣ ν дѣлитель 6. Такъ какъ $1^2-3.1^2=-2$, $2^2-3.1^2=1$, $3^2-3.1^2=6$, то мы знаемъ простѣйшія рѣшенія уравненій $v^2-3u^2=1$, $v^2-3u^2=-2$, $v^2-3u^2=-3$, $v^2-3u^2=6$. Съ помощью этихъ рѣшеній мы найдемъ всѣ остальныя.

$2^2-3.1^2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, а слѣдовательно, $(2+\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3})^n=1$; если $(2+\sqrt{3})^n=p_n+q_n\sqrt{3}$, то $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^n=p_n-q_n\sqrt{3}$ и $(p_n+q_n\sqrt{3})(p_n-q_n\sqrt{3})=p_n^2-3q_n^2=1$, т. е. $v=p_n$, $u=q_n$ тоже рѣшеніе. Можно показать, что, давая n всевозможныя цѣлыя положительныя рѣшенія, мы найдемъ всѣ рѣшенія уравненія $v^2-3u^2=1$. Если $(v+u\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=(2v-3u)+(2u-v)\sqrt{3}=v_1+u_1\sqrt{3}$, то $(v-u\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=v_1-u_1\sqrt{3}$ и $v_1^2-3u_1^2=(v^2-3u^2)(2^2-3)=v^2-3u^2$, т. е., если (v, u) рѣшеніе, то и (v_1, u_1) рѣшеніе.

Найдемъ предѣлы, по которымъ можно судить о величинѣ v_1.

Такъ какъ $v^2-3u^2>0$ и $v^2-4u^2\leqslant 0$, или $\frac{v}{\sqrt{3}}>u\geqslant\frac{v}{2}$, то $2v-\frac{3}{2}v\geqslant v_1>2v-v\sqrt{3}$, т. е. $0{,}5v\geqslant v_1>0{,}26v$; значитъ, при этомъ преобразованіи значеніе v уменьшается раза въ три—четыре; $u_1\geqslant 0$. Примѣняя это преобразованіе послѣдовательно нѣсколько разъ, придемъ къ $v_m<4$, слѣдовательно, $v_m=2$, $u_m=1$ и $v+u\sqrt{3}=$
$=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})^m}=(2+\sqrt{3})^{m+1}$, $v=p_{m+1}$, $u_m=q_{m+1}$.

Совершенно такимъ же образомъ найдемъ и рѣшенія остальныхъ уравненій:

$v^2-3u^2=1$	$2+\sqrt{3}$, $7+4\sqrt{3}$, $26+15\sqrt{3}$,.... $2^2-3.1^2=1$, $7^2-3.4^2=1$, $26^2-3.15^2=1$,....
$3u^2-v^2=2$	$\sqrt{3}+1$, $(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})=3\sqrt{3}+5$, $11\sqrt{3}+19$,.... $3.1^2-1^2=2$, $3.3^2-5^2=2$, $3.11^2-19^2=2$,....
$3u^2-v^2=3$	$2\sqrt{3}+3$, $7\sqrt{3}+12$, $26\sqrt{3}+45$,.... $3.2^2-3^2=3$, $3.7^2-12^2=3$, $3.26^2-45^2=3$,....
$v^2-3u^2=6$	$3+\sqrt{3}$, $9+5\sqrt{3}$, $33+19\sqrt{3}$,.... $3^2-3.1^2=6$, $9^2-3.5^2=6$, $33^2-3.19^2=6$,....

Возвращаемся къ раціональнымъ треугольникамъ. Площадь s раціональна въ треугольникахъ, для которыхъ

$$n=\frac{2}{1-3\delta^2},\qquad \delta<\sqrt{\frac{1}{3}},\qquad b=2(n-1)$$

$\delta=$	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{5}{9}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{19}{33}$,....
$n=$	3,	8,	27,	98,	363,...
$a=$	3,	13,	51,	193,	723,....
$b=$	4,	14,	52,	194,	724,....
$c=$	5,	15,	53,	195,	725,....
$s=$	6,	84,	1170,	16296,	226974,....

Раціональная биссектрисса соотвѣтствуетъ наименьшей сторонѣ въ треугольникахъ, для которыхъ

$$c=\frac{1}{3t^2-1},\qquad \sqrt{\frac{1}{3}}<t<\frac{2}{3}$$

$t=$	$\frac{7}{12}$,	$\frac{26}{45}$	
$a=$	46,	673,....	
$b=$	47,	674,...	
$c=$	48,	665,....	
$l_a=$	$41\frac{53}{95}$,	$584\frac{764}{1349}$,....	

Раціональная биссектрисса соотвѣтствуетъ средней сторонѣ въ треугольникахъ, въ которыхъ

$$c=\frac{2}{3t^2-1},\qquad t>\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$t=$	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{7}{12}$,	$\frac{11}{19}$,....
$a=$	8,	27,	98,	363,....
$b=$	7,	26,	97,	362,....
$c=$	6,	25,	96,	361,....
$l_b=$	6,	$22\frac{1}{2}$,	84,	$313\frac{1}{2}$.

Раціональная биссектрисса соотвѣтствуетъ наибольшей сторонѣ въ треугольникахъ, въ которыхъ

$$c=\frac{1}{1-3t^2},\qquad t<\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$t=$	$\frac{1}{2}$,	$\frac{4}{7}$,	$\frac{15}{26}$,....
$a=$	6,	51,	678,....
$b=$	5,	50,	677,....
$c=$	4,	49,	676,....
$l_a=$	$3\frac{1}{3}$,	$42\frac{14}{33}$,	$585\frac{195}{451}$,....

Раціональная медіана соотвѣтствуетъ наименьшей сторонѣ

въ треугольникахъ, для которыхъ

$$n=\frac{1+q}{3q^2-1} \qquad t=\frac{2}{3},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{7}{12},\ldots$$

$$q>\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \begin{array}{llll} n= 5, & 20, & 76,\ldots \\ a= 9, & 39, & 151,\ldots \\ b= 10, & 40, & 152,\ldots \\ c= 11, & 41, & 153,\ldots \end{array}$$

$$b=2n$$

$$m_a=\ 9\frac{1}{2},\ 35\frac{1}{2},\ 132\frac{1}{2},\ldots$$

Раціональная медіана соотвѣтствуетъ средней сторонѣ въ треугольникахъ, въ которыхъ

$$n=\frac{2q}{3q^2-1} \qquad q=\frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{12},\ldots$$

$$q>\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \begin{array}{llll} n= 4, & 15, & 56,\ldots \\ a= 8, & 30, & 112,\ldots \\ b= 7, & 29, & 111,\ldots \\ c= 9, & 31, & 113,\ldots \\ m_a= 7, & 26, & 97,\ldots \end{array}$$

$$a=2n$$

Раціональная медіана соотвѣтствуетъ наибольшей сторонѣ въ треугольникахъ, въ которыхъ

$$n=\frac{1+q}{1-3q^2} \qquad q=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{4}{7},\ldots$$

$$q<\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \begin{array}{lllll} n=2, & 6, & 21, & 77,\ldots \\ a=5, & 13, & 43, & 155,\ldots \\ b=4, & 12, & 42, & 154,\ldots \\ c=3, & 11, & 41, & 153,\ldots \end{array}$$

$$b=2n$$

$$m_a=\ 2\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2},\ 35\frac{1}{2},\ 132\frac{1}{2},\ldots$$

Сопоставимъ всѣ случаи раціональныхъ треугольниковъ, въ которыхъ стороны выражаются однозначными или двузначными числами (числа, соотвѣтствующія одному и тому же треугольнику, указаны горизонтальной чертой, а буква надъ чертой или подъ чертой напоминаетъ, что́ раціонально въ треугольникѣ,—площадь (*s*), биссектрисса (*l*) или медіана (*m*)).

$$\underset{s}{\underline{3,\ 4,\ 5}},\ \ \overset{l}{\overline{4,\ 5,\ 6}},\ \ \underset{m}{\underline{5,\ 6,\ 7}},\ \ \underset{l}{\underline{6,\ 7,\ 8}},\ \ \overset{m}{\overline{7,\ 8,\ 9}},\ \ \underset{m}{\underline{8,\ 9,\ 10}},\ \ \overset{m}{\overline{11,\ 12,\ 13}},\ \ \underset{s}{\underline{13,\ 14,\ 15}},\ \ \overset{l}{\overline{25,\ 26,\ 27}},\ \ \underset{m}{\underline{29,\ 30,\ 31}}$$

$$\overset{m}{\overline{39,\ 40,\ 41}},\ \ \underset{m}{\underline{41,\ 42,\ 43}},\ \ \overset{l}{\overline{46,\ 47,\ 48}},\ \ \underset{l}{\underline{49,\ 50,\ 51}},\ \ \overset{s}{\overline{51,\ 52,\ 53}},\ \ \underset{l}{\underline{96,\ 97,\ 98}}.$$

Оказывается три треугольника съ раціональной площадью, шесть съ раціональной биссектриссой, шесть съ раціональной медіаной (если не считать треугольника (3, 4, 5)),—всего 15 треугольниковъ.

Телеграфированіе помощью электрическихъ лучей.

Р. Блохмана.

Переводъ съ французскаго.

Усовершенствованія, сдѣланныя въ послѣдніе годы въ области телеграфированія помощью электрическихъ волнъ, касались, главнымъ образомъ, передачи депешъ на возможно большее разстояніе.

Быть можетъ, въ успѣхѣ, постепенно достигнутомъ именно въ этомъ направленіи, и кроется причина того пренебреженія, съ какимъ относились къ явленіямъ, происходящимъ въ промежуточной средѣ, и къ преодолѣнію затрудненій, связанныхъ съ этими явленіями.

Эти затрудненія въ общемъ сводятся къ слѣдующему.

1. Колебанія распространяются отъ станціи отправленія во всѣ стороны, вслѣдствіе чего тайное телеграфированіе невозможно.

2. Станція, воспринимающая сигналы, получаетъ ихъ со всѣхъ сторонъ, и потому правильное сообщеніе между двумя станціями можетъ быть нарушено и нерѣдко можетъ оказаться совершенно невозможнымъ, даже и помимо случаевъ атмосферныхъ возмущеній.

3. Наконецъ, на станціи полученія нельзя опредѣлить, откуда пришла телеграмма.

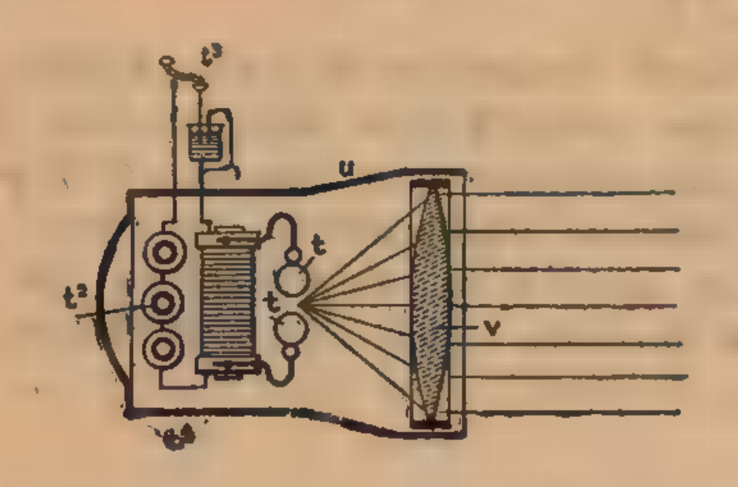
Эти неудобства дѣлаютъ необходимымъ примѣненіе мачтъ или, вѣрнѣе, укрѣпленныхъ на нихъ проволокъ, которыя помѣщаются въ воздушной средѣ; кстати сказать, вслѣдствіе примѣненія проволокъ въ телеграфированіи электрическими волнами, является неправильнымъ и самое названіе „безпроволочное телеграфированіе“.

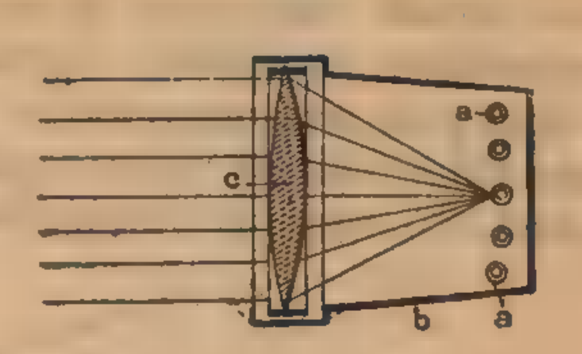
Я привожу здѣсь новый способъ установки, при которой устраняются неудобства, связанныя съ употребленіемъ мачтъ.

I.

Я воспользовался для передачи электрическихъ волнъ линзами, приготовленными изъ вещества, діэлектрическая постоянная котораго очень велика, напр., резина, стекло, парафинъ и пр. Интересно и важно въ практическомъ отношеніи отмѣтить, что размѣры этихъ линзъ не должны быть особенно велики сравнительно съ длиною волнъ; въ этомъ убѣдили меня многочисленные опыты, и мнѣ, напр., удавалось посылать телеграммы на разстояніе, большее километра, пользуясь линзами въ 20 см. діаметромъ при длинѣ волны въ 20 см. и при начальной энергіи, меньшей килоуатта.

Что касается возбудителя и пріемника электрическихъ волнъ, то я не внесъ никакихъ измѣненій въ устройство существующихъ приборовъ. Особенностью новой системы является слѣдующее: при ней не надо прибѣгать къ помощи мачтъ; возбудители *t* (фиг. 1), равно какъ и пріемники *a*, заключены въ ме-





Фиг. 1.

таллическія камеры *u*, *b*, въ стѣнки которыхъ вдѣланы вышеупомянутыя линзы *v* и *c*. Электрическія волны, такимъ образомъ, не могутъ миновать линзъ, которыя ихъ собираютъ и придаютъ имъ соотвѣтствующее направленіе. Электрическая энергія, доставляемая возбудителями *t*, вся направляется по оси линзы *v* и приводитъ въ дѣйствіе помѣщенный на большомъ разстояніи пріемникъ *a*. Это дѣйствіе усиливается тѣмъ, что на станціи полученія электрическіе лучи должны пройти черезъ такую же линзу *c*, прежде чѣмъ достигнуть пріемника, помѣщеннаго въ ея фокусѣ.

Вслѣдствіе этого, электрическія волны распространяются только между двумя опредѣленными станціями, имѣющими соотвѣтствующіе приборы. Такимъ образомъ, станцію отправленія можно уподобить проекціонному аппарату, а получающую станцію—глазу. Новую систему мы можемъ съ полнымъ правомъ назвать: *телеграфированіемъ помощью электрическихъ лучей*.

Въ установленной мною системѣ каждая изъ 8 станцій видна изъ другой станціи и можетъ быть приведена съ нею въ сообщеніе.

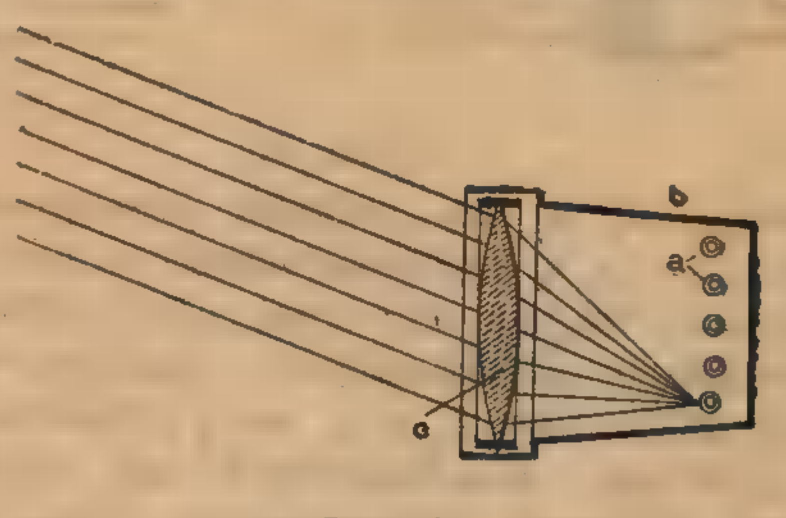
Атмосферныя возмущенія не служатъ препятствіемъ для распространенія электрическихъ лучей, что даетъ этой системѣ преимущества передъ всѣми оптическими способами телеграфированія и, въ частности, передъ способомъ безпроволочнаго телефонированія, въ которомъ пользуются свѣтовыми лучами и, въ качествѣ пріемника, селеномъ.

Замѣтимъ, что, прибавляя станціи съ релэ, черезъ которыя депеши пересылаются автоматически, можно произвольно увеличивать разстояніе и, благодаря этому, выбирать удобныя мѣста для устройства станцій. Такимъ образомъ, можно телеграфировать черезъ горы, либо переходя черезъ нихъ, либо огибая ихъ, причемъ можно и не прибѣгать къ мачтамъ. Впрочемъ, можно пользоваться и мачтами, такъ какъ при моей системѣ употребляются тѣ же передатчики и пріемники, что и при другихъ системахъ.

Къ употребленію мачтъ слѣдуетъ прибѣгать тогда, когда желательно послать депешу по всѣмъ направленіямъ или на очень большія разстоянія. Употребленіе мачтъ даетъ возможность сохранить телеграмму втайнѣ и передаетъ ее болѣе правильно, не допуская постороннихъ возмущеній.

II.

Наконецъ, слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующее удобство новой системы: можно точно опредѣлить направленіе лучей, принятыхъ станціей. Лучи, параллельные оси линзы, собираются въ фокусѣ и оказываютъ дѣйствіе на пріемникъ, въ немъ помѣщающійся. Если же направленіе лучей не совпадаетъ съ осью линзы, то они не попадутъ въ фокусъ (фиг. 2), при этомъ, если



Фиг. 2.

ихъ отклоненіе отъ оси достаточно велико, то они не окажутъ дѣйствія на пріемникъ, помѣщенный въ фокусѣ; однако, они могутъ привести въ дѣйствіе пріемники, помѣщенныя въ новомъ фокусѣ. Слѣдовательно, увеличивая число пріемниковъ въ камерѣ воспринимающей станціи, можно установить сопряженіе между различными частями пространства, находящагося передъ линзой, и нѣкоторой поверхностью; можно, такъ сказать, отобразить часть пространства внутри камеры; здѣсь замѣчается аналогія съ сѣтчаткой человѣческаго глаза, которая даетъ изображенія предметовъ, расположенныхъ передъ нею. Опыты показали, что можно опредѣлить направленіе лучей съ точностью въ нѣсколько градусовъ.

Такимъ образомъ, является возможность опредѣлить положеніе судна во время бури, если только оно находится на такомъ разстояніи отъ *двухъ* станцій, что сигналы его могутъ быть получены. Эти крупныя преимущества новой системы позволяютъ надѣяться, что въ недалекомъ будущемъ она будетъ примѣнена на всѣхъ опасныхъ берегахъ, особенно, у устьевъ рѣкъ и при входѣ въ гавани. При дальнѣйшемъ расширеніи телеграфированія электрическими лучами, по мѣрѣ того, какъ число станцій будетъ расти, несомнѣнно, дѣло дойдетъ до того, что правильныя сообщенія между пунктами, наиболѣе посѣщаемыми судами, сдѣлаются невозможными, вслѣдствіе пертурбацій, производимыхъ непрерывной посылкой телеграммъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Предварительная международная конференція по безпроводному телеграфу. Предварительная конференція для подготовленія къ предстоящей международной конференціи, предназначаемой для общаго урегулированія безпроводной телеграфіи установленіемъ точныхъ международныхъ правилъ эксплоатаціи ея, состоялась по почину германскаго правительства, давно усмотрѣвшаго въ стремленіи Компаніи Маркони къ достиженію монопольныхъ правъ на безпроводный телеграфъ серьезный ущербъ свободному развитію этого новаго способа сообщенія и тормазъ къ дальнѣйшимъ изобрѣтательнымъ успѣхамъ въ этомъ дѣлѣ. Какъ извѣстно, согласно договору, заключенному Лондонскимъ ллойдомъ съ Маркони, предполагалось, что всѣ станціи ллойда, разсѣянныя по всему земному шару, будутъ служить сигнализаціонными станціями Маркони и принимать отъ проходящихъ мимо судовъ только телеграммы, переданныя аппаратами Маркони. Такимъ образомъ, всѣ суда были бы вынуждены къ установкѣ аппаратовъ Маркони, и всякое измѣненіе, улучшеніе и усовершенствованіе безпроводной телеграфіи, исходящее не отъ самого Маркони, было бы исключено. Утвержденіе общества Маркони, что телеграммы, передаваемыя другими аппаратами безпроводнаго телеграфа, не могутъ быть принимаемы аппаратами Маркони, опровергается практикою. Въ этомъ отношеніи достаточно вспомнить, что Сѣверо-Германскому ллойду, суда котораго снабжены аппаратами Маркони, принадлежитъ въ Бремергафенѣ станція другой системы и что, несмотря на разность системъ, вполнѣ успѣшно удавалось сообщаться на разстояніе до 300 килом.

Приглашенія на предварительную конференцію были посланы Германіею Австріи, Венгріи, Великобританіи, Испаніи, Италіи, Россіи, Франціи и Соединеннымъ Штатамъ. Послѣ предварительныхъ дипломатическихъ сношеній, названныя государства выразили готовность отправить своихъ делегатовъ на упомянутую конференцію, состоявшуюся въ Берлинѣ (въ зданіи Имперскаго Почтамта) съ 4-го по 13-е августа, подъ предсѣдательствомъ товарища статсъ-секретаря Сидова.

Во время совѣщаній всѣми присутствующими была вполнѣ признана необходимость международной регламентаціи искровой безпроводной телеграфіи. Представители большинства странъ, принимавшихъ участіе въ конференціи, пришли къ соглашенію относительно принятія слѣдующихъ основаній этой регламентаціи.

Береговыя станціи обязаны въ сношеніяхъ съ судами, находящимися въ морѣ, принимать и передавать всѣ телеграммы безъ различія системы безпроводнаго телеграфа. Для возможнаго

облегченія судамъ сношенія со станціями будутъ распубликованы всѣ необходимыя техническія свѣдѣнія. Преимущество въ очереди передачи будетъ отдаваемо телеграммамъ о несчастіяхъ на морѣ и съ требованіемъ помощи съ судовъ. Тарифная плата устанавливается пословная; она составляется изъ таксы за передачу по линіямъ существующей телеграфной сѣти по опредѣленіямъ международнаго телеграфнаго регламента и особой платы за морскую передачу, состоящей изъ платы береговой станціи и изъ платы судовой станціи.

Спеціальный органъ безпроводнаго телеграфа. Недавно начала появляться въ Америкѣ газета подъ названіемъ „Безъ проволоки", въ которой помѣщаются новости, получаемыя исключительно посредствомъ безпроводнаго телеграфа. Газета эта издается въ маленькомъ городкѣ на островѣ въ 20 миляхъ отъ Калифорнійскаго берега и, появляясь ежедневно, даетъ своимъ читателямъ новѣйшія свѣдѣнія, собранныя за ночь при посредствѣ безпроводнаго телеграфа. Поводомъ къ такому устройству и къ подобной утилизаціи телеграфа безъ проводовъ послужило повреждение въ теченіе нѣсколькихъ дней прежняго телеграфнаго сообщенія въ той мѣстности, вызванное бывшею минувшею зимою бурею, и во время котораго жители городка были совершенно отрѣзаны отъ телеграфнаго сообщенія, чего нельзя ожидать при устройствѣ теперешняго безпроводнаго сообщенія.

(„Почт.-Тел. Ж.").

Новые опыты по телефонированію безъ проводовъ. Опыты производились въ Америкѣ между двумя пароходами на Сѣверной рѣкѣ. Самъ изобрѣтатель Коллинсъ находился на одномъ суднѣ, а на другомъ суднѣ, на разстояніи 500 метровъ, былъ его братъ. Установка на каждомъ суднѣ состояла изъ обычнаго телефоннаго передатчика и пріемника; одна проволока была проведена къ вершинѣ мачты, а другая въ воду, гдѣ она заканчивалась маленькимъ мѣднымъ цилиндромъ, погруженнымъ въ воду; затѣмъ воздухъ и вода дополняли цѣпь.

Въ присутствіи нѣкоторыхъ американскихъ ученыхъ Коллинсъ взялъ телефонъ и медленнымъ яснымъ голосомъ, который однако не могъ быть разслышанъ кѣмъ-либо внѣ каюты, просилъ брата тотчасъ, какъ тотъ его услышитъ, махнуть пять разъ платкомъ, что и было исполнено. По неизвѣстной причинѣ, которую Коллинсъ приписываетъ недостаточности или неисправности аппаратовъ, братъ его не могъ ему отвѣтить по телефону, такъ что передача удавалась только въ одну сторону.

Профессоръ астрономіи Гарретъ и другія лица, бывшія на одномъ суднѣ съ братомъ Коллинса, заявили, что, хотя слова доходили до нихъ и не вполнѣ отчетливо, но все-таки результатъ

опыта былъ настолько убѣдительный, что не оставляетъ сомнѣнія въ успѣхѣ, современемъ, безпроводной телефоніи.

Въ скоромъ времени предполагается дѣлать новые опыты съ усовершенствованными приборами, и Коллинсъ высказываетъ убѣжденіе, что ему вскорѣ удастся дать судамъ возможность разговаривать между собою на разстояніи до 5 миль.

Безпроволочный телеграфъ и полярныя экспедиціи.—Новая германская полярная экспедиція имѣетъ намѣреніе соорудить станцію телеграфа, которая была бы въ постоянномъ сообщеніи съ ближайшею телеграфною станціею на континентѣ. До сихъ поръ съ такими экспедиціями всегда приходилось разставаться съ удручающимъ чувствомъ неопредѣленности и, можетъ быть, вѣчности предстоящей разлуки. Теперь же возникло желаніе воспользоваться достояніемъ новѣйшихъ успѣховъ безпроволочной телеграфіи; на дальнемъ сѣверномъ оконечномъ пунктѣ материка въ Ледовитомъ океанѣ предполагается устроить станцію, назначеніе которой будетъ состоять въ производствѣ въ теченіе цѣлаго года метеорологическихъ, земно-магнитныхъ, океано-графическихъ и другихъ научныхъ наблюденій и сообщать все, представляющее нѣкоторый интересъ, научнымъ станціямъ на континентъ, не взирая на раздѣляющія эти станціи громадныя ледяныя пространства. Для осуществленія этой идеи, экспедиція, снаряжаемая докторомъ Шоллемъ въ Мюнхенѣ, соорудитъ на соотвѣтствующемъ пунктѣ Шпицбергена между 78 и 80 градусами сѣверной широты наблюдательный домикъ, который дастъ возможность перезимовки въ этой нелюдимой странѣ даже при морозѣ до 55 град. Ц. и выдержитъ страшныя зимнія бури. Станція снабжается полнымъ комплектомъ аппарата искровой телеграфіи по системѣ „Общества безпроволочной телеграфіи профессора Брауна и Сименса и Гальске". Представляемая этою станціею вѣрная точка опоры для участниковъ экспедиціи будетъ, несомнѣнно, много способствовать проекту д-ра Аншитцъ-Кемпфе побороть препятствія полярныхъ льдовъ посредствомъ практично сооруженнаго подводнаго судна, что, по теперешнимъ свѣдѣніямъ о полярномъ морѣ и по современному положенію техники, можетъ считаться наиболѣе осуществимымъ средствомъ проникнуть въ сѣверныя полярныя области. Подобное судно также будетъ снабжено станціею безпроволочнаго телеграфа, что дастъ ему возможность во всякое время ставить наблюдателей на Шпицбергенѣ въ извѣстность о его мѣстонахожденіи и о сдѣланныхъ наблюденіяхъ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Доказательство одной извѣстной теоремы.

Въ № 349 (см. XXX, № 1) „Вѣстника Опытн. Физ.", помѣщено простое доказательство, принадлежащее M. Juel'ю, теоремы:

Треугольникъ, въ которомъ двѣ внутреннія биссектрисы равны, есть равнобедренный.

Намъ кажется нелишнимъ обратить вниманіе читателей „Вѣстника" на то обстоятельство, что предложеніе это не зависитъ отъ извѣстнаго постулата Евклида. Чтобы оправдать такое утвержденіе, мы приведемъ другое доказательство той же теоремы, опираясь на слѣдующую лемму, такъ какъ доказательство Juel'я не удовлетворяетъ требуемому условію:

„Если діагонали выпуклаго четыреугольника взаимно дѣлятся пополамъ, то противоположныя стороны его не пересѣкаются".

Справедливость этой леммы вытекаетъ изъ того, что діагонали четыреугольника образуютъ со сторонами равные внутренніе накрестъ-лежащіе углы.

Пусть въ треугольникѣ ABC биссектрисы BB' и CC' равны. Соединяемъ B съ серединой M прямой $B'C'$, продолжаемъ BM на разстояніе $MD=BM$ и проводимъ прямыя DB' и DC'.

Прямая $B'D$ не можетъ лежать внутри угла $AB'C'$, въ противномъ случаѣ она пересѣкала бы BC', чего не допускаетъ предыдущая лемма. Отсюда легко заключить, что точка B находится внутри треугольника $C'CD$.

Пусть теперь, если возможно, $AB < AC$ и, слѣдовательно, $\angle C < \angle B$, или $\angle C'CB' < \angle C'BB'$, что приводитъ къ неравенству:

$$\angle C'CB' < \angle C'DB' \qquad (1).$$

Такъ какъ $\angle C'CB < \angle CBB'$, то $OB < OC$. Съ другой стороны, въ виду того, что $BB'=CC'$, $OB' > OC'$ и $\angle B'C'C > \angle C'B'B$.

Изъ треугольниковъ $BC'B'$ и $CB'C'$, имѣющихъ по двѣ равныхъ стороны и понеравному углу между ними, выходитъ, что

$$B'C > BC' \text{ или } B'C > B'D,$$

вслѣдствіе чего имѣемъ изъ треугольника $CB'D$:

$$\angle B'CD < \angle B'DC. \qquad (2)$$

Складывая неравенства (1) и (2), получаемъ:

$\angle C'CD < \angle C'DC$, откуда слѣдуетъ неравенство сторонъ $C'D$ и CC', или неравенство биссектрисъ BB' и CC', что представляетъ собою абсурдъ. Къ подобному же абсурду приводитъ и другое возможное предположеніе $AB > AC$. Слѣдовательно $AB=AC$, что и требовалось доказать.

Е. Григорьевъ (Казань).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 394 (4 сер.). На плоскости лежатъ вокругъ точки A этой плоскости n равныхъ прямыхъ круглыхъ конусовъ такъ, что каждая изъ ихъ вершинъ находится въ точкѣ A и каждый изъ конусовъ касается двухъ сосѣднихъ конусовъ. Опредѣлить уголъ при вершинѣ осевого сѣченія каждаго изъ конусовъ.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 395 (4 сер.). Вписать въ шаровой сегментъ цилиндръ наибольшаго объема, зная радіусъ R шара, часть котораго составляетъ сегментъ, при условіи, что высота сегмента равна $\frac{1}{3}R$.

Л. Ямпольскій (Braunschweig).

№ 396 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$x^2 - yz + cy + bz = a^2 + bc,$$
$$y^2 - zx + az + cx = b^2 + ca,$$
$$z^2 - xy + bx + ay = c^2 + ab.$$

Евг. Григорьевъ (Казань).

№ 397 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій

$$\frac{x-y}{y^4} + \frac{x-z}{z^4} = (a-b)x,$$
$$\frac{y-z}{z^4} + \frac{y-x}{x^4} = (b-c)y,$$
$$\frac{z-x}{x^4} + \frac{z-y}{y^4} = (c-a)z.$$

Евг. Григорьевъ (Казань).

№ 398 (4 сер.). Въ данный полукругъ діаметра $2R$ вписать трапецію такъ, чтобы двѣ ея вершины лежали на діаметрѣ, а двѣ другія на окружности полукруга и чтобы объемъ тѣла, получаемаго отъ вращенія этой трапеціи около меньшей изъ параллельныхъ сторонъ, достигалъ maximum'а.

Г. Оганянцъ (Москва).

№ 399 (4 сер.). Поршень вертикальнаго цилиндра предназначенъ для поднятія груза. На этотъ поршень дѣйствуютъ паромъ такой температуры, при которой упругость пара уравновѣшиваетъ давленіе столба ртути въ 2 метра высоты.

Опредѣлить діаметръ поршня при условіи, чтобы онъ могъ поднять грузъ въ одну тонну.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 320 (4 сер.). *Къ какому предѣлу стремится выраженіе*

$$u = x\left[\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt[4]{x^4+a^4}\right]$$

при безконечномъ возрастаніи x?

(Заимств. изъ *Časopis*).

Послѣ ряда тожественныхъ преобразованій

$$\frac{x\left(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt[4]{x^4+a^4}\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}} = \frac{x\left(x^2+a^2-\sqrt{x^4+a^4}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}} =$$

$$= \frac{x\left(x^2+a^2-\sqrt{x^4+a^4}\right)\left(x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}\right)}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}\right)\left(x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}\right)} =$$

$$= \frac{2a^2x^3}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}\right)\left(x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}\right)} =$$

$$= 2a^2 . \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt[4]{x^4+a^4}} . \frac{x^2}{x^2+a^2+\sqrt{x^4+a^4}} =$$

$$= 2a^2 . \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\left(\frac{a}{x}\right)^4}} . \frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2+\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^4}}$$

приводимъ *u* къ виду

$$2a^2 . \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\left(\frac{a}{x}\right)^4}} . \frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2+\sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^4}} \qquad (1).$$

Замѣчая, что предѣлъ выраженія $\frac{a}{x}$, при безконечномъ возрастаніи x, равенъ нулю, находимъ при помощи элементарныхъ теоремъ изъ теоріи предѣловъ, что предѣлъ *u* (см. (1)), при безконечномъ возрастаніи x, равенъ

$$2a^2 . \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt[4]{1}} . \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{a^2}{2} .$$

Итакъ, искомый предѣлъ равенъ $\frac{a^2}{2}$.

И. Плотникъ (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань); *Л. Ямпольскій* (Одесса); *Н. Готлибъ* (Митава).

№ 332 (4 сер.). *На перпендикулярѣ* Dx, *возставленномъ изъ данной точки* D *даннаго отрѣзка* BC *къ прямой* BC, *найти такую точку* A, *чтобы уголъ* BAC *былъ втрое болѣе разности угловъ* ABC *и* ACB.

(Заимств. изъ *Journal de Mathématiques élémentaires*).

Пусть отрѣзокъ $BD < DC$ *). Предполагая задачу рѣшенной, отложимъ

*) Предположеніе $BD=DC$ приводитъ къ невозможности задачи.

на отрѣзкѣ DC отрѣзокъ $DM = BD$. Тогда $\angle ABM = \angle ABC = \angle AMB$, $\angle BAD = \angle MAD = \frac{1}{2} \angle BAM$ (1) и

$$\angle MAC = \angle AMB - \angle ACB = \angle ABC - \angle ACB \quad (2).$$

Но, по условію (см. (2)),

$$\angle MAC = \frac{\angle BAC}{3} \quad (3),$$

откуда (см. (3))

$$\angle BAM = \frac{2}{3} \angle BAC,$$

и (см. (1), (3))

$$\angle DAM = \frac{1}{3} \angle BAC - \angle MAC,$$

такъ что AM есть биссектриса угла DAC, а потому

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} \quad (4),$$

откуда видно, что точка A, лежа на перпендикулярѣ Dx, лежитъ въ то же время на геометрическомъ мѣстѣ точекъ, соотвѣтственныя разстоянія которыхъ отъ точекъ D и C находятся въ отношеніи $\frac{DM}{MC}$; это геометрическое мѣсто точекъ представляетъ собою, какъ извѣстно, окружность, построенную, какъ на діаметрѣ, на отрѣзкѣ MN, гдѣ N—точка, дѣлящая отрѣзокъ BC внѣшнимъ образомъ въ отношеніи $\frac{DM}{MC}$. Отсюда вытекаетъ построеніе. Отложивъ на DC отрѣзокъ $DM = BD$, дѣлимъ отрѣзокъ DC внѣшнимъ образомъ въ отношеніи $\frac{DM}{MC}$, строимъ на діаметрѣ NM окружность; каждая изъ точекъ встрѣчи этой окружности съ перпендикуляромъ Dx есть одна изъ искомыхъ точекъ. Изъ равенства (4), принимая во вниманіе, что AD, какъ перпендикуляръ, менѣе наклонной, мы видимъ, что задача возможна лишь при $DM < MC$, или $BD < DC - DM = DC - BD$, откуда

$$BD < \frac{DC}{2} \quad (5).$$

При соблюденіи условія (5), точки M и N лежатъ по разныя стороны прямой Dx, а потому прямая Dx встрѣтитъ окружность, имѣющую діаметромъ NM; поэтому неравенство (5) есть необходимое и достаточное условіе возможности рѣшенія задачи. Изъ вышеприведенныхъ соображеній вытекаетъ рѣшеніе задачи съ помощью приложенія алгебры къ геометріи. Введя обозначенія $BD = b$, $DC = c$, $AD = x$, $AC = y$, имѣемъ (см. (4)):

$$\frac{y}{x} = \frac{MC}{DM} = \frac{DC - DM}{DM} = \frac{DC - DB}{BD} = \frac{c - b}{b},$$

$$y^2 - x^2 = c^2,$$

откуда

$$y = \frac{x(c-b)}{b}, \qquad \frac{x^2(c-b)^2}{b^2} - x^2 = c^2,$$

$$x^2(c^2 - 2bc) = b^2c^2, \quad x^2(c - 2b) = b^2c,$$

$$x = b\sqrt{\frac{c}{c-2b}} = \sqrt{c \cdot \frac{b^2}{c-2b}} \quad (6).$$

Пользуясь формулой (6), легко построить x и прійти опять къ условію (5) возможности рѣшенія задачи.

Л. Ямпольскій (Одесса); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *А. Заикинъ* (Самара); *Я. Дубновъ* (Вильна).

№ 333 (4 сер.). *Серебряный полый шарикъ вѣситъ* p *граммовъ; позолоченный, онъ вѣситъ* q *граммовъ и плаваетъ въ чистомъ спиртѣ въ состояніи безразличнаго равновѣсія. Опредѣлить толщину позолоты шарика.*

Пусть внутренній и внѣшній радіусы серебрянаго шарика равны соотвѣтственно x и y, а внѣшній радіусъ позолоченнаго шарика равенъ z. Называя удѣльные вѣса золота и спирта соотвѣтственно черезъ d и δ и замѣчая, что вѣсъ позолоты равенъ, по условію, $q-p$ и вѣсъ вытѣсняемаго позолоченнымъ шарикомъ спирта равенъ q, находимъ:

$$\frac{4}{3}\pi(z^3-y^3)d=q-p \qquad (1),$$

$$\frac{4}{3}\pi z^3\delta=q \qquad (2).$$

Изъ уравненія (2) имѣемъ

$$z=\sqrt[3]{\frac{3q}{4\pi\delta}} \qquad (3).$$

Подставляя значеніе z^3 изъ уравненія (2) въ уравненіе (1), опредѣляемъ y^3, откуда получимъ

$$y=\sqrt[3]{\frac{3[q(d-\delta)+p\delta]}{4\pi\delta d}} \qquad (4).$$

Поэтому, искомая толщина позолоты равна (см. (3) и (4))

$$z-y=\sqrt[3]{\frac{3q}{4\pi\delta}}-\sqrt[3]{\frac{3[q(d-\delta)+p\delta]}{4\pi\delta d}}.$$

Для того, чтобы задача была возможна, необходимо прежде всего условіе (см. (1)) $q>p>0$; при соблюденіи этого условія, числа z (см. (2)), y (см. (4), замѣчая, что $d=19>\delta=0{,}79$) и разность $z-y$ (см. (1), замѣчая, что $q>p$) положительны; кромѣ того, необходимо, чтобы по даннымъ задачи опредѣлился внутренній діаметръ шарика x, какъ число положительное и меньшее y. Вычисляя вѣсъ серебряной оболочки шарика, найдемъ

$$\frac{4}{3}\pi(y^3-x^3).d'=p \qquad (5),$$

гдѣ d' удѣльный вѣсъ серебра. Такъ какъ, по условію, $p>0$, то, если только x положительно, то (см. (5)) и условіе $y>x$ соблюдено. Но x^3 и x одновременно либо оба положительны, либо оба отрицательны; поэтому достаточно, чтобы x^3 оказалось положительнымъ. Опредѣляя x^3, при помощи уравненій (4) и (5), находимъ

$$x^3=y^3-\frac{3p}{4\pi d'}=\frac{3[qd'(d-\delta)-p\delta(d-d')]}{4\pi\delta dd'},$$

откуда видно, что условіемъ возможности задачи является также неравенство

$$qd'(d-\delta)-p\delta(d-d')>0.$$

Но это неравенство вытекаетъ изъ предыдущихъ условій $q>p>0$, такъ какъ

$$d'(d-\delta)=10{,}47(19-0{,}79)>0{,}79.(19-10{,}47)=\delta(d-d'),$$

откуда видно, что при $q>p>0$ задача всегда возможна.

Н. Гончаровъ (Короча); *А. Заикинъ* (Самара); *Н. Куницынъ* (Усть-Медвѣдица); *Г. Оганянцъ* (Эривань).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 30-го Октября 1903 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.